

ALGO5 - Algorithmique avancée

TD 01 – Fonctions de hachage : Codage et Adressage

Julien Sopena

Exercice 1 : Fonction de hachage par division

Une université veut se constituer une base de données pour le passage au LMD. Chaque module a ses données propres. Chacune de ces entités est accompagnée d'une clé. Les clés sont construites sur le modèle suivant :

$\langle NOM_MODULE \rangle [L1|L2|L3|M1|M2|D]$.

Le programmeur choisit d'utiliser une fonction de hachage par division :
 $h(k) = k \text{ modulo } (m)$ avec $m = 256$

Question 1

Dans un premier temps, pour coder la clé, le programmeur va la considérer comme étant déjà un nombre.
Calculez le code des clés en base 10 : *ALGL3* et *BDL3*.

Question 2

Dans un second temps, il va utiliser un codage en bit : concaténation de l'écriture en bit du code ASCII de chaque caractère. Calculez le code des clés : *ALGL3* et *BDL3*. Quel est l'avantage d'un tel codage ?

Question 3

Comparez ces deux codages. Quelle sont leurs avantages et limites respectifs ?

Question 4

Le programmeur choisit d'utiliser une fonction de hachage (d'adressage) par division $h(k) = k \text{ modulo } (m)$ avec $m = 256$. Calculez la valeur de hachage des deux clés : *ALGL3* et *BDL3* pour chaque codage. Que remarquez vous ? Expliquez ce résultat.

Question 5

Que doit faire le programmeur ? Concluez par une remarque générale sur les fonctions de hachage par division.

Question 6

Maintenant le programmeur va utiliser un codage alphabétique : chaque lettre est remplacée par sa position dans l'alphabet. Le résultat est interprété comme un nombre en base dix. Calculez le code des clés : *ALGL3* et *BDL3*.

Question 7

A la suite des remarques précédentes, le programmeur choisit d'utiliser $m = 9$ comme coefficient de la fonction de hachage (d'adressage) par division $h(k) = k \text{ modulo } (m)$. Calculez la valeur de hachage des deux clés : *ALGL3* et *GLA3* pour chaque codage. Que remarquez vous ? Expliquez ce résultat.

Question 8

Montrez que l'on peut étendre le cas précédent aux clés codées en base B avec un coefficient $B - 1$

Exercice 2 : Fonction de hachage par multiplication

On se propose ici d'étudier le coefficient multiplicateur dans une fonction de hachage avec un adressage par multiplication. Soit la fonction :

$$h(k) = \lfloor m(Ak \text{ modulo}(1)) \rfloor, \text{ avec } 0 < A < 1$$

Question 1

Considérons l'ensemble de clés $k \in \{0, \dots, 255\}$. Quels inconvénients présente le coefficient :

$$A = 1 - 10^{-4}$$

Question 2

Le problème est-il différent avec l'ensemble de clés $k \in \{0, \dots, 1023\}$?

Question 3

On suppose maintenant que les clés sont codées dans la base B . Peut on choisir A voisin de 0 si $(BA) \text{ modulo } 1$ est voisin de zéro ?

Exercice 3 : Fonction de hachage polynomiale

Soit k un entier formé des chiffres $c_1c_2 \cdots c_n$ et la fonction :

$$f(k) = f(c_1c_2 \cdots c_n) = c_1 + c_2 * 10 + c_3 * 10^2 + \cdots + c_n * 10^n$$

Question 1

Cette fonction est-elle injective ?

Question 2

Cette fonction peut-elle servir de fonction de hachage ? Proposez une fonction de hachage utilisant cette fonction.

Question 3

Quel intérêt présente cette fonction pour faire une fonction de hachage ? Donnez un exemple d'ensemble (Univers) de clés pour lequel cette fonction est particulièrement bien adaptée.