Théorie des graphes

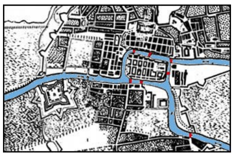
I

Introduction & Définitions

Historique

1726 Leonhard Euler expose une solution formelle au problème des 7 ponts de Königsberg (Kaliningrad):

« Lors d'une promenade, est-il possible de passer sur tous les ponts de la ville une et une seule fois ? »



Domaines d'applications

Chimie :
Modélisation des molécules

Mécanique :
Treillis

Biologie :
Réseau de neurones
Séquencement du génome

Sciences sociales :
Modélisation des relations

Et biensûr dans divers domaines de l'informatique

Avertissement

Il faut se méfier de l'apparente simplicité de certains résultats.

Dans la pratique, la taille des graphes ne permet pas de représentation graphique.

ATTENTION :
Veiller à toujours appliquer les algorithmes présentés même si le résultat peut être trouvé « artisanalement »

Définition : graphe

Un **graphe orienté** G c'est un couple (S,A) avec :

- S un ensemble fini : **ensemble des sommets**
- A une relation binaire sur S : **ensemble des arcs**

Un **graphe NON orienté** G c'est un couple (S,A) :

- S un ensemble fini : **ensemble des sommets**
- A paires non ordonnées : **ensemble des arêtes**

Degré d'un sommet

Dans un graphe non orienté :

On appel **degré** d'un sommet :
le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes

Dans un graphe orienté :

On appelle **degré sortant** d'un sommet :
le nombre d'arcs qui partent de ce sommet

On appelle **degré entrant** d'un sommet :
le nombre d'arcs qui arrivent à ce sommet

On appelle **degré** d'un sommet :
la somme des degrés entrant et sortant du sommet

Chemin

Un **chemin** d'un sommet u au sommet u' est une séquence de sommets $(v_0, v_1, v_2, \dots v_{k-1}, v_k)$ tel que :

$$u = v_0, \quad u' = v_k \quad et \quad \forall\, i, (v_{i-1}, v_i) \in A$$

On dit que ce chemin a une **longueur** k

Ce chemin est **élémentaire** ssi $\forall\, i, j,\ v_i \neq v_j$

Un sommet u **accessible** depuis un sommet v ssi :
il existe un chemin du sommet u au sommet v

Degré d'un sommet

Dans un graphe orienté :

Un chemin $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forme un **circuit** ssi $v_0 = v_k$

Ce circuit est **élémentaire** ssi $\forall\, i, j \in [1,k-1],\ v_i \neq v_j$

Une **boucle** est un circuit de longueur 1

Un est graphe **acyclique** ssi il ne contient aucun circuit

Dans un graphe non orienté :

Un chemin $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ forme un **cycle** ssi
$(v_0 = v_k) \wedge (\forall\, i, j \in [1,k-1],\ v_i \neq v_j)$

Un graphe est **acyclique** ssi il ne contient aucun cycle

Propriétés

On dit d'un graphe qu'il est :

Réflexif ssi : $\forall\, u_i \in S,\ (u_i, u_i) \in A$

Irréflexif ssi : $\forall\, u_i \in S,\ (u_i, u_i) \notin A$

Transitif ssi :
$\forall\, u_i, u_j, u_k \in S,\ (u_i, u_j) \in A \wedge (u_j, u_k) \in A \Rightarrow (u_i, u_k) \in A$

On dit d'un graphe orienté qu'il est :

Symétrique ssi : $\forall\, u_i, u_j \in S,\ (u_i, u_j) \in A \Rightarrow (u_j, u_i) \in A$

Anti-Symétrique (Assymetrique) ssi :
$\forall\, u_i, u_j \in S,\ (u_i, u_j) \in A \wedge (u_j, u_i) \in A \Rightarrow u_i = u_j$

Connexité

On dit d'un graphe non orienté qu'il est :

Connexe ssi pour toute paire de sommets $[u,v]$ il existe une chaîne entre les sommets u et v.

Complet ssi tous les sommets sont «reliés» 2 à 2 :
$\forall\, u, v \in S,\ (u,v) \in A$

On dit d'un graphe orienté qu'il est :

Connexe ssi le graphe non-orienté correspondant est connexe

Fortement connexe ssi si pour tout (u,v) il existe un chemin de u à v et de v à u

Complet ssi tous les sommets sont «reliés» 2 à 2 :
$\forall\, u, v \in S,\ ((u,v) \in A) \vee ((v,u) \in A)$

K-Connexe

Un graphe non-orienté est **k-connexe** ssi :
il reste connexe après suppression d'un ensemble quelconque de k-1 arêtes et s'il existe un ensemble de k arêtes qui déconnecte le graphe.

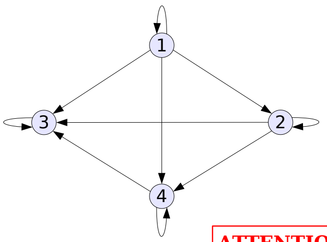
autrement dit s'il existe au moins k chaînes indépendantes entre chaque couple de sommets.

Un graphe orienté est **k-connexe** ssi :
le graphe non-orienté correspondant est k-connexe

Cette notion est utilisée :
en électronique pour le calcul de la fiabilité

dans l'étude de jeux de stratégie (cut and connect).

Exemple



Ce graphe orienté est :
Réflexif
Antisymétrique
Transitif
Connexe
Complet

ATTENTION :
Dans un graphe orienté :
Complet n'implique pas Fortement connexe.
Ex : il n'y a pas de chemin pour aller de 2 a 1

Graphes remarquables

Certains graphes portent des noms particuliers :

Biparti = graphe qui peut être partitionner en deux sous ensembles de sommets S_1 et S_2 tel que :
$\forall\, (u,v) \in A,\ (u \in S_1 \wedge v \in S_2) \vee (v \in S_1 \wedge u \in S_2)$

Hypergraphe = graphe non orienté ou chaque arrête est une **hyperarête** qui relie un sommet à un sous ensemble de sommets.

Forêt = graphe non orienté acyclique.

Arbre = graphe connexe non orienté acyclique.

Représentation d'un graphe

Il existe deux façons de représenter un graphe (S,A) :

Liste adjacente : pour les graphes peu denses

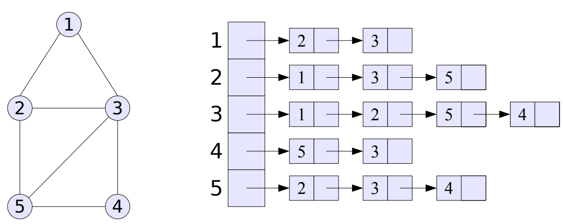
$Card(A) << (Card(S))^2$

Matrice d'incidence : pour les graphes denses

$Card(A) \simeq (Card(S))^2$

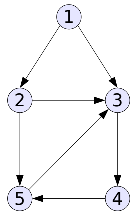
Liste d'adjacence

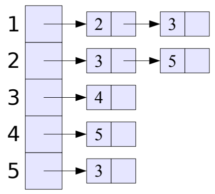
Pour chaque sommet $u \in S$ on a une liste d'adjacence :
$Adj[u]$ liste des sommets $v \in S$ tel que $(u,v) \in A$



Liste d'adjacence

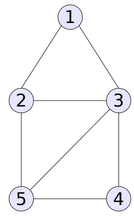
Pour chaque sommet $u \in S$ on a une liste d'adjacence :
Adj [u] liste des sommets $v \in S$ tel que $(u,v) \in A$





Matrice d'adjacence

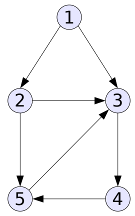
Pour un graphe non orienté : $\forall i, j \in S \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & si (i,j) \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$



$$Mat(S,A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence

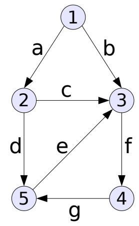
Pour un graphe orienté : $\forall i, j \in S \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & si (i,j) \in A \\ 0 & sinon \end{cases}$



$$Mat(S,A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'incidence

Pour un graphe orienté : $\forall i \in S, \forall j \in A \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & si\ \vec{j} = (i,x) \\ -1 & si\ \vec{j} = (x,i) \\ 0 & sinon \end{cases}$



$$Mat(S,A) = \left(\begin{array}{c|ccccccc} & a & b & c & d & e & f & g \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

II

Parcours en largeur

&

Parcours en profondeur

Bordure

On appel **bordure** d'un sous-ensemble de sommet S' :

L'ensemble des sommets de V – S', où V est l'ensemble des voisins des sommets de S' dans le graphe G.

Elle est notée :

$$\begin{aligned} B(S',G) &= V - S' \\ &= \{ \ v \in S \mid (v \notin S') \ \wedge \ (\exists s \in S, \ (s,v) \in A) \ \} \end{aligned}$$

Rappel :

L'ensemble { x | P (x) }

⇔

l'ensemble des x tels que la condition P (x) soit vraie

Parcours

La permutation $L(s_1, \ldots, s_n)$ est un **parcours** de G ssi :

$$\forall j \in [1..n], \ B(L[1, j-1], G) \neq 0 \ \Rightarrow \ s_j \in B(L[1, j-1], G)$$

avec $L[i,j]$ une sous liste de la permutation L

Dans cette définition :

$L[1,j]$: Liste des *j* sommets déjà visités

$L(s_1, \ldots, s_n)$: Un ordre pour parcourir les graphes tq

si au moins l'un des sites déjà parcourus a un voisin dans le graphe alors le prochain site visité doit être l'un de ces voisins.

Sommet ouvert ou fermé

Un sommet *s* est **ouvert dans L[1..i]** ssi :

$$\exists \ v \in L[i+1..n], \ (s,v) \in A$$

Sommet ouvert ou fermé

Un sommet *s* est **ouvert dans L[1..i]** ssi :

$$\exists \ v \in L[i+1..n], \ (s,v) \in A$$

Cette définition signifie :

Il y a des voisins de *s* qui n'ont pas encore été visités
(dans les i premiers sommets du parcours)

Sommet ouvert ou fermé

Un sommet *s* est **ouvert dans L[1..i]** ssi :

$$\exists \ v \in L[i+1..n], \ (s,v) \in A$$

Cette définition signifie :

Il y a des voisins de *s* qui n'ont pas encore été visités
(dans les i premiers sommets du parcours)

Un sommet *s* est **fermé dans L[1..i]** ssi :

$$\textbf{NOT} \ (\ \exists \ v \in L[i+1..n], \ (s,v) \in A \ ) \Leftrightarrow \forall \ v \in L[i+1..n], \ (s,v) \notin A$$

Sommet ouvert ou fermé

Un sommet *s* est **ouvert dans L[1..i]** ssi :

$$\exists \ v \in L[i+1..n], \ (s,v) \in A$$

Cette définition signifie :

Il y a des voisins de *s* qui n'ont pas encore été visités
(dans les i premiers sommets du parcours)

Un sommet *s* est **fermé dans L[1..i]** ssi :

$$\textbf{NOT} \ (\ \exists \ v \in L[i+1..n], \ (s,v) \in A \ ) \Leftrightarrow \forall \ v \in L[i+1..n], \ (s,v) \notin A$$

Cette définition signifie :

Tous les voisins de *s* ont déjà été visités
(dans les i premiers sommets du parcours)

Parcours en largeur : BFS

On appel **parcours en largeur** - **B**readth **F**irst **S**earch

Un parcours où pour tout sommet $s_i \in$ L[1..i]
le prédécesseur est le premier sommet ouvert dans L[1..i-1]

Parcours en largeur : BFS

On appel **parcours en largeur** - **B**readth **F**irst **S**earch

Un parcours où pour tout sommet $s_i \in$ L[1..i]
le prédécesseur est le premier sommet ouvert dans L[1..i-1]

Cette définition signifie :

Lorsque l'on a visité j-1 sommets le prochain sommet est un voisin du premier site déjà visité qui a encore au moins un voisin non visité.

Parcours en largeur : BFS

On appel **parcours en largeur** - **B**readth **F**irst **S**earch

Un parcours où pour tout sommet $s_i \in$ L[1..i]
le prédécesseur est le premier sommet ouvert dans L[1..i-1]

Cette définition signifie :

Lorsque l'on a visité j-1 sommets le prochain sommet est un voisin du premier site déjà visité qui a encore au moins un voisin non visité.

Autrement dit :

A chaque étape du parcours on visite tous les voisins non visités des sites visités à l'étape précédente.

Parcours en Profondeur : DFS

On appel **parcours en profondeur** - **D**epth **F**irst **S**earch

Un parcours où pour tout sommet $s_i \in$ L[1..i]
le prédécesseur est le dernier sommet ouvert dans L[1..i-1]

Parcours en Profondeur : DFS

On appel **parcours en profondeur** - **D**epth **F**irst **S**earch

Un parcours où pour tout sommet $s_i \in$ L[1..i]
le prédécesseur est le dernier sommet ouvert dans L[1..i-1]

Cette définition signifie :

Lorsque l'on a visité j-1 sommets le prochain sommet est un voisin du *dernier* site déjà visité qui a encore au moins un voisin non visité.

Parcours en Profondeur : DFS

On appel **parcours en profondeur** - **D**epth **F**irst **S**earch

Un parcours où pour tout sommet $s_i \in L[1..i]$
le prédécesseur est le dernier sommet ouvert dans L[1..i-1]

Cette définition signifie :

Lorsque l'on a visité j-1 sommets le prochain sommet est un voisin du *dernier* site déjà visité qui a encore au moins un voisin non visité.

Autrement dit :

On descend le plus possible dans le parcours.
Quand on ne peut plus on remonte le moins possible

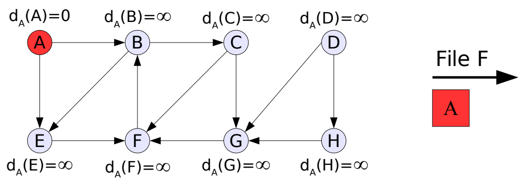
Algorithme BFS

```
BFS (graphe G, sommet s)
  POUR CHAQUE v ≠ s FAIRE couleur(v) ← Blanc ; distance(v) ← ∞
  couleur(s) ← Rouge
  distance(s) ← 0
  F ← {s}
  TANT-QUE non FileVide(F) FAIRE
     s ← Défiler(F)
     POUR CHAQUE v ∈ Adj[s]
        SI couleur(v) = Blanc ALORS
           couleur(v) ← Rouge
           distance(v) ← distance(s) + 1
           père(v) ← s
           Enfiler(F,v)
        FIN SI
     FIN POUR
     couleur(s) ← Noir
  FIN-TANT-QUE
```


Exemple de l'algorithme BFS

A l'état initial :
seul le sommet A est rouge

La file est réduite au site A

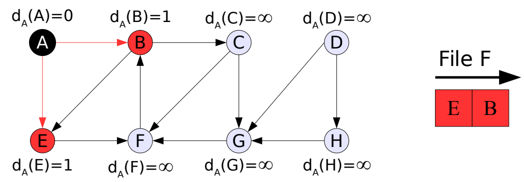


Exemple de l'algorithme BFS

On défile le sommet A

On visite les voisins blancs de A : B et E

Le site A devient noir

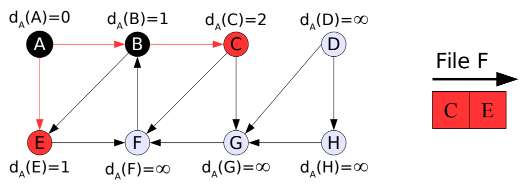


Exemple de l'algorithme BFS

On défile le sommet B

On visite le voisin blanc de B : C

Le site B devient noir

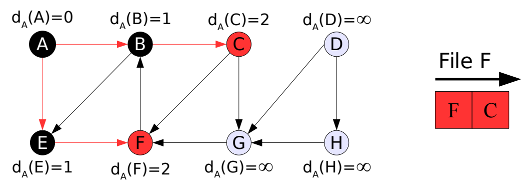


Exemple de l'algorithme BFS

On défile le sommet E

On visite le voisin blanc de B : F

Le site B devient noir

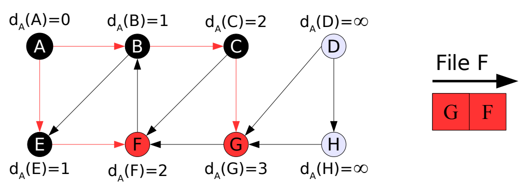


Exemple de l'algorithme BFS

On défile le sommet C

On visite le voisin blanc de C : G

Le site C devient noir

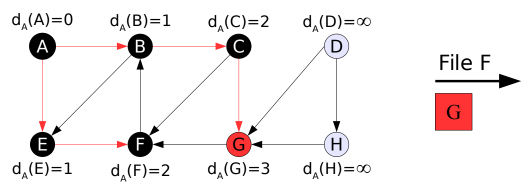


Exemple de l'algorithme BFS

On défile le sommet F

F n'a pas de voisin blanc

Le site F devient noir

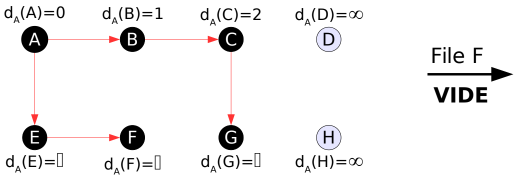


Exemple de l'algorithme BFS

Il n'y a plus de sommet à défiler : Fin de l'algorithme

On obtient une **arborescence en largeur**

$v \in S$, $d_A(v)$ = longueur du **plus court chemin** entre A et v

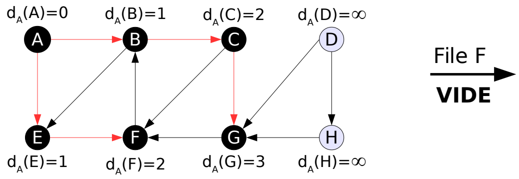


Exemple de l'algorithme BFS

On défile le sommet G

G n'a pas de voisin blanc

Le site G devient noir

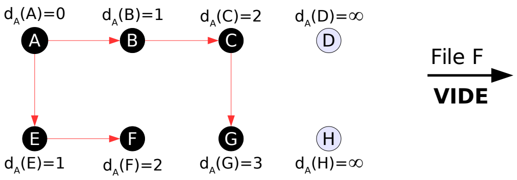


Exemple de l'algorithme BFS

Il n'y a plus de sommet à défiler : Fin de l'algorithme

On obtient une **arborescence en largeur**

$v \in S$, $d_A(v)$ = longueur du **plus court chemin** entre A et v

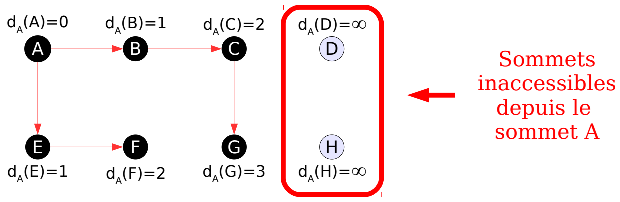


Exemple de l'algorithme BFS

ATTENTION :

Dans un parcours en largeur : tous les sommets ne sont pas visités

Ainsi les sites inaccessibles depuis l'origine gardent une distance ∞



Initialisation DFS

VARIABLE
date : un compteur d'étape

DFS_run (graphe *G*)
POUR CHAQUE $\sigma \in S$ **FAIRE**
couleur(s) ← Blanc
FIN POUR
date ← 0
POUR CHAQUE $s \in S$ **FAIRE**
SI couleur(s) = Blanc **ALORS**
DFS (G , s)
FIN SI
FIN POUR

Algorithme récursif DFS

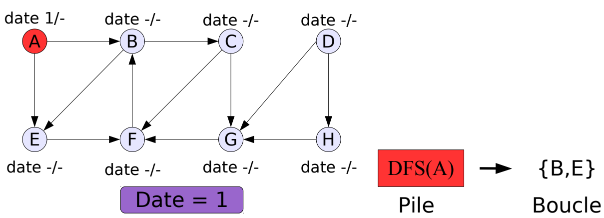
DFS (graphe *G*, sommet *s*)
couleur(s) ← Rouge
dateDebut(s) ← inc(date)
POUR CHAQUE $v \in$ Adj[s]
SI couleur(v) = Blanc **ALORS**
père(v) ← s
DFS (G,v)
FIN SI
FIN POUR
couleur(s) ← Noir
dateFin(s) ← inc(date)

Exemple de l'algorithme DFS

La fonction DFS_run() appelle DFS(A).

Seul le sommet A est rouge

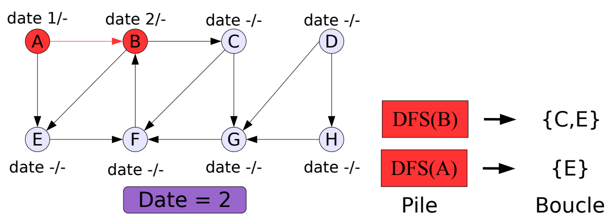
La pile des appels de fonction est réduite au DFS(A)



Exemple de l'algorithme DFS

On empile la fonction DFS(B)

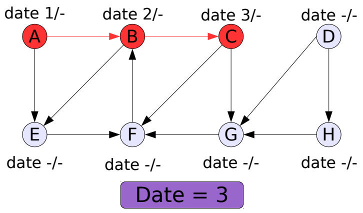
B devient rouge et on note la date : dateDebut(B) ← 2



Exemple de l'algorithme DFS

On empile la fonction DFS(C)

C devient rouge et on note la date : dateDebut(B) ← 3

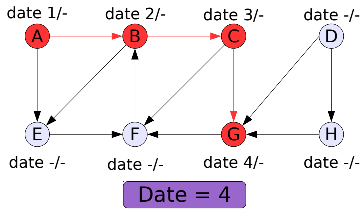


Pile		Boucle
DFS(C)	→	{G,F}
DFS(B)	→	{E}
DFS(A)	→	{E}

Exemple de l'algorithme DFS

On empile la fonction DFS(G)

G devient rouge et on note la date : dateDebut(G) ← 4

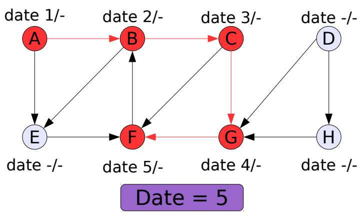


Pile		Boucle
DFS(G)	→	{F}
DFS(C)	→	{F}
DFS(B)	→	{E}
DFS(A)	→	{E}

Exemple de l'algorithme DFS

On empile la fonction DFS(F)

F devient rouge et on note la date : dateDebut(F) ← 5

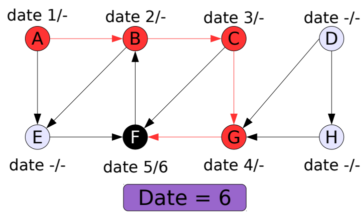


Pile		Boucle
DFS(F)	→	{}
DFS(G)	→	{}
DFS(C)	→	{F}
DFS(B)	→	{E}
DFS(A)	→	{E}

Exemple de l'algorithme DFS

Fin de la boucle dans la fonction DFS(F)

F devient noir et on note la date : dateFin(F) ← 6

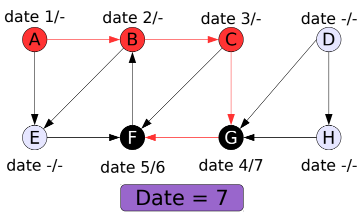


Pile		Boucle
DFS(G)	→	{}
DFS(C)	→	{F}
DFS(B)	→	{E}
DFS(A)	→	{E}

Exemple de l'algorithme DFS

Fin de la boucle dans la fonction DFS(G)

F devient noir et on note la date : dateFin(G) ← 7



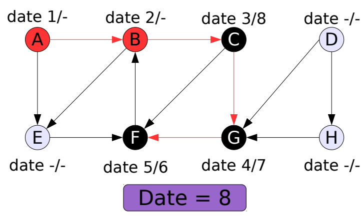
Pile		Boucle
DFS(C)	→	{F}
DFS(B)	→	{E}
DFS(A)	→	{E}

Exemple de l'algorithme DFS

Le sommet F n'est pas blanc ⇒ pas d'appel à DFS(F)

Fin de la boucle dans la fonction DFS(C)

C devient noir et on note la date : dateFin(C) ← 8



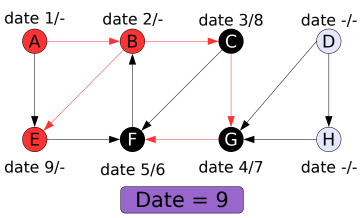
Pile		Boucle
DFS(B)	→	{E}
DFS(A)	→	{E}

Exemple de l'algorithme DFS

Retour à la boucle dans la fonction DFS(B)

On empile la fonction DFS(E)

E devient rouge et on note la date : dateDebut(E) ← 9



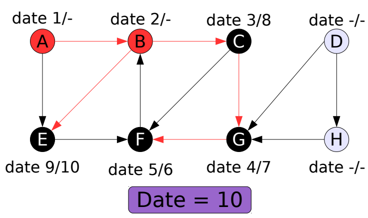
Pile		Boucle
DFS(E)	→	{F}
DFS(B)	→	{}
DFS(A)	→	{E}

Exemple de l'algorithme DFS

Le sommet F n'est pas blanc ⇒ pas d'appel a DFS(E)

Fin de la boucle dans la fonction DFS(E)

E devient noir et on note la date : dateFin(E) ← 10

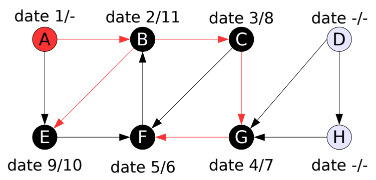


Pile		Boucle
DFS(B)	→	{}
DFS(A)	→	{E}

Exemple de l'algorithme DFS

Fin de la boucle dans la fonction DFS(B)

B devient noir et on note la date : dateFin(B) ← 11



Date = 11

DFS(A) → {E}

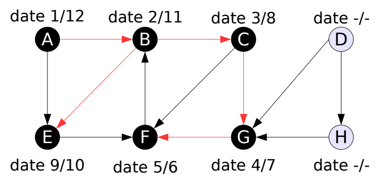
Pile Boucle

Exemple de l'algorithme DFS

Le sommet E n'est pas blanc ⇒ pas d'appel à DFS(A)

Fin de la boucle dans la fonction DFS(A)

A devient noir et on note la date : dateFin(A) ← 12



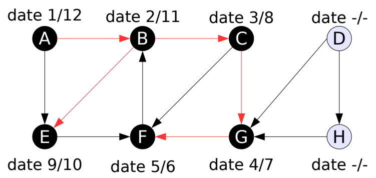
Date = 12

Pile Boucle

Exemple de l'algorithme DFS

L'appel à la fonction DFS(A) est terminé.

La boucle principale de DFS_run() appel ensuite DFS(A) et DFS(B) qui ce terminent tout de suite : « pas de voisin blanc »



ATTENTION :
La variable date n'est pas réinitialisée

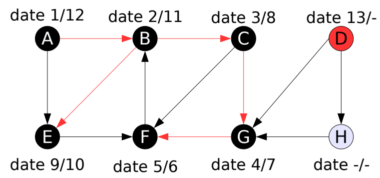
Date = 12

Pile Boucle

Exemple de l'algorithme DFS

On empile la fonction DFS(D)

F devient rouge et on note la date : dateDebut(F) ← 13



Date = 13

DFS(D) → {G,H}

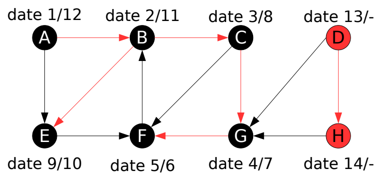
Pile Boucle

Exemple de l'algorithme DFS

Le sommet G n'est pas blanc ⇒ pas d'appel a DFS(G)

On empile la fonction DFS(H)

H devient rouge et on note la date : dateDebut(H) ← 14



Date = 14

DFS(H) → {G}

DFS(D) → {}

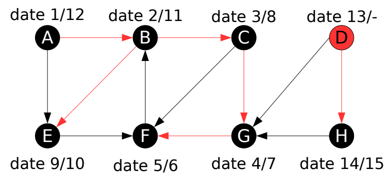
Pile Boucle

Exemple de l'algorithme DFS

Le sommet G n'est pas blanc ⇒ pas d'appel a DFS(G)

Fin de la boucle dans la fonction DFS(H)

H devient noir et on note la date : dateFin(H) ← 15



Date = 15

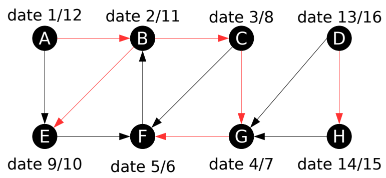
DFS(D) → {}

Pile Boucle

Exemple de l'algorithme DFS

Fin de la boucle dans la fonction DFS(H)

H devient noir et on note la date : dateFin(H) ← 16



Date = 16

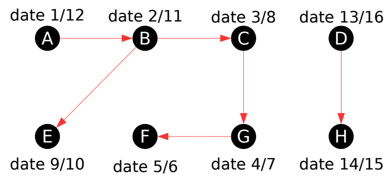
Pile Boucle

Exemple de l'algorithme DFS

Toutes les fonctions lancées par DFS_init() avortent.

Parcours en profondeur ⇒ tous les sommets sont visités

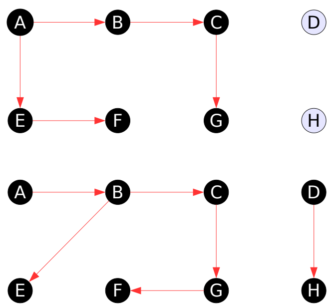
On obtient une **foret en profondeur**



Date = 16

Pile Boucle

Comparaison BFS et DFS



BFS
↓
Arborescence en largeur

DFS
↓
Forêt en profondeur

Théorème des parenthèses

Les dates de découvertes et fin de traitement ont :
une structure parenthésée

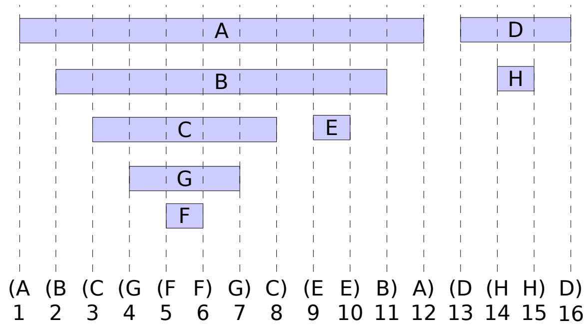
Théorèmes :
$\forall\ u, v \in S$ une seul des 3 propositions suivantes est vraie :

[début[u], fin[u]] ∩ [début[v], fin[v]] = ∅

[début[u], fin[u]] ⊂ [début[v], fin[v]]
ET u descendant de v dans une arborescence de la foret

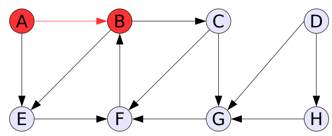
[début[v], fin[v]] ⊂ [début[u], fin[u]]
ET v descendant de u dans une arborescence de la foret

Théorème des parenthèses



Théorème du chemin blanc

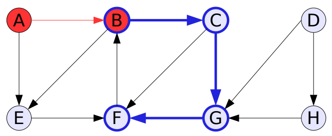
Théorèmes :
Dans une foret en profondeur, un sommet *u* est un descendant d'un sommet *v* si seulement si :
lorsque l'on découvre *u* (*dateDebut[u]*),
il existe un **chemin de sommet BLANC** entre u et v



On vient de découvrir B

Théorème du chemin blanc

Théorèmes :
Dans une foret en profondeur, un sommet *u* est un descendant d'un sommet *v* si seulement si :
lorsque l'on découvre *u* (*dateDebut[u]*),
il existe un **chemin de sommet BLANC** entre u et v

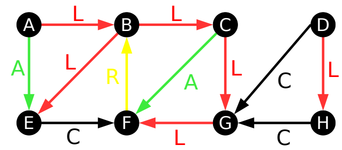


On vient de découvrir B
(B, C, G, F) chemin BLANC
Donc : F descendant de B

Classement des arcs

Un arc *(u,v)* est appelé :

- **arc de liaison** : les arcs de la forêt en profondeur.
- **arc de retour** : si *v* est un des ancêtres de *u*
- **arc avant** : si *u* est un des ancêtres de *v* ET qu'il n'est pas un arc de liaison
- **arc couvrant** : tous les autres



Théorème des arcs en retour

Théorèmes :
Un graphe orienté est acyclique ssi : un parcours en profondeur de G ne génère pas d'arc retour.

Démonstration :
(**Acyclique ⇒ Pas d'arc retour**) ⇔ (arc de retour ⇒ cycle) :

Soit *(u,v)* un arc retour ⇒ *v* est un ancêtre de *u*
⇒ il existe un chemin de *v* a *u*
⇒ Ce chemin et *(u,v)* forme un cycle

(**Pas d'arc retour ⇒ Acyclique**) ⇔ (cycle ⇒ arc de retour)

Soit C un cycle et *v* le premier sommet de *C* visité dans le parcours.
On note *(u,v)* l'arc du cycle qui conduit a *v*.

v premier sommet visité ⇒ les autres sommets de C sont blanc
⇒ u descendant de v (Th. Chemin blanc)
⇒ (u,v) est un arc retour

Algorithme de décomposition

On cherche ici à décomposer un graphe orienté en composantes fortement connexes

L'algorithme utilise :
un **double parcours en profondeur**

Décomposition (graphe *G*)

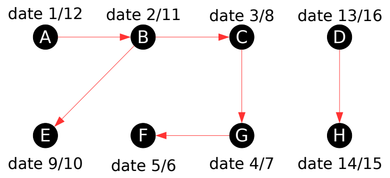
DFS_run(G)

Calculer ᵗG : transposé de G (inversion du sens de tous les arcs)

DFS_run(ᵗG) dans la boucle principale qui appelle DFS(s), on parcourt les sommets par ordre décroissant des *dateFin* calculées lors du premier DFS(G)

Exemple de décomposition

A la fin du premier appel DFS (G), on obtient :



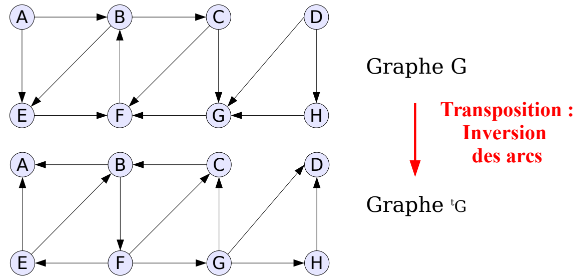
On ordonne les sommets suivants *dateFin* (décroissant):

D – H – A – B – E – C – G – F

C'est l'ordre qui sera utilisé dans la boucle du 2[em] DFS_run

Exemple de décomposition

On inverse les arcs pour obtenir : le graphe transposé



Exemple de décomposition

La transposition est une opération matricielle

La matrice d'adjacence du graphe transposé ${}^tG$ est :
la transposée de la matrice d'adjacence du graphe G

Ex : L'inversion de l'arc $\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{23}=0 \\ a_{32}=1 \end{cases}$

Graphe G

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

Transposition :

$$\forall\, i,j \in S : a_{ij} \leftarrow a_{ji}$$

Graphe ${}^tG$

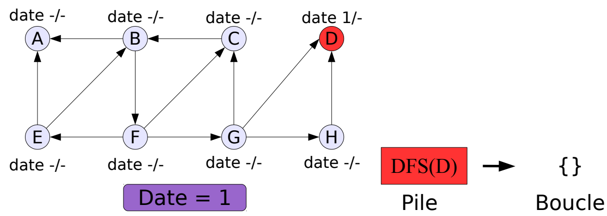
$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&0&0&1\\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Exemple de décomposition

On lance une deuxième fois le parcours en profondeur

D est le premier sommet dans la boucle de DFS_run()

Appel a DFS(D); D devient rouge.

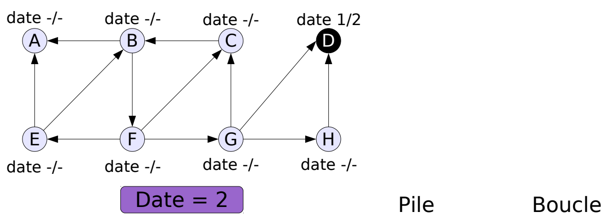


Exemple de décomposition

D n'a pas de voisins blancs

D devient noir

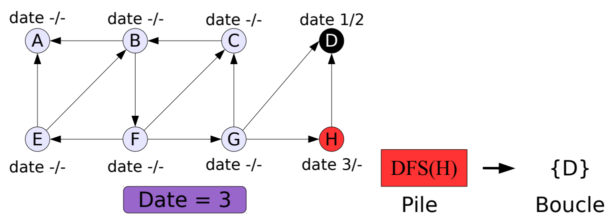
Fin du 1[er] appel de DFS() dans la boucle de DFS_run()



Exemple de décomposition

H est le 2[em] sommet dans la boucle de DFS_run()

Appel à DFS(H); H devient rouge.

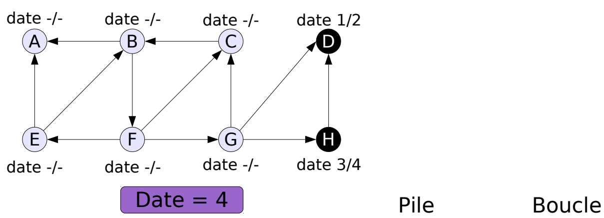


Exemple de décomposition

H n'a pas de voisins blancs

H devient noir

Fin du 2[em] appel de DFS() dans la boucle de DFS_run()

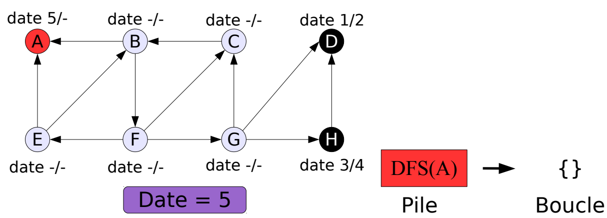


Exemple de décomposition

A est le 3[em] sommet dans la boucle de DFS_run()

Appel a DFS(A)

A devient rouge.

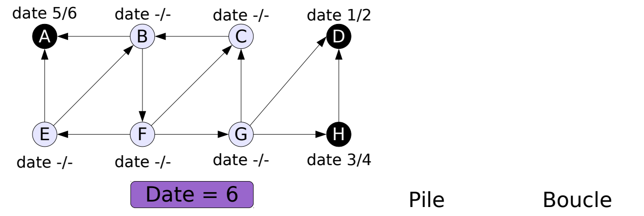


Exemple de décomposition

A n'a pas de voisins blancs

A devient noir

Fin du 3^em appel de DFS() dans la boucle de DFS_run()

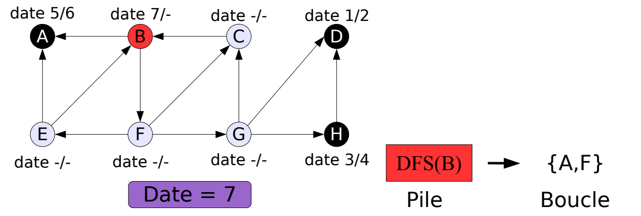


Exemple de décomposition

A est le 4^em sommet dans la boucle de DFS_run()

Appel à DFS(B)

B devient rouge.

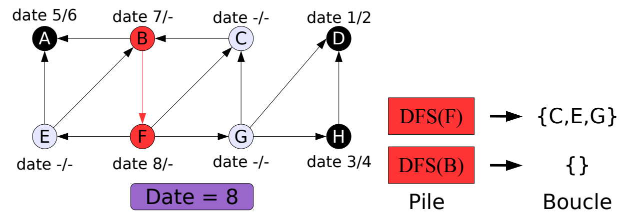


Exemple de décomposition

Le sommet A n'est pas blanc ⇒ pas d'appel à DFS(A)

Appel à DFS(F)

F devient rouge

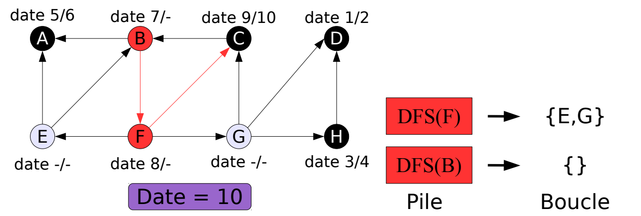


Exemple de décomposition

Appel a DFS(C)

C devient rouge

C n'a pas de voisins blancs ⇒ C devient noir

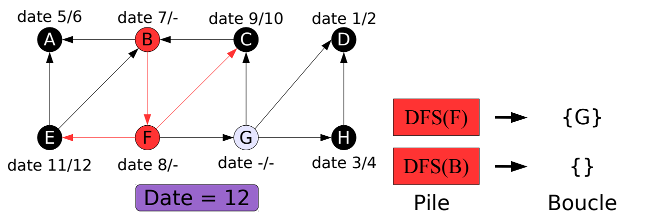


Exemple de décomposition

Appel à DFS(E)

E devient rouge

E n'a pas de voisins blancs ⇒ E devient noir

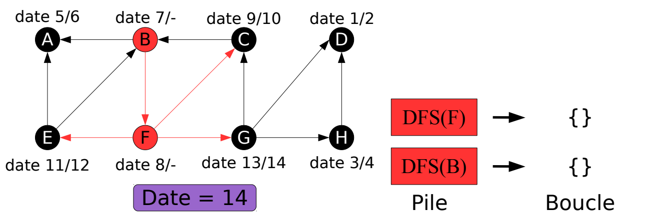


Exemple de décomposition

Appel à DFS(G)

G devient rouge

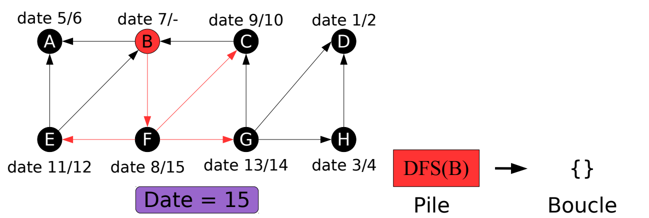
G n'a pas de voisins blancs ⇒ G devient noir



Exemple de décomposition

Fin de la boucle dans la fonction DFS(F)

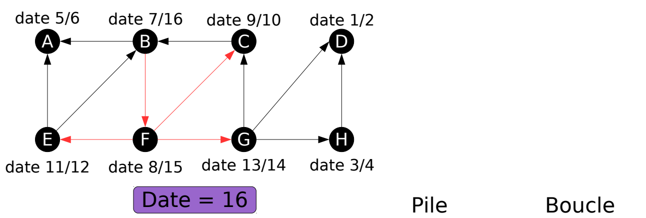
F devient noir et on note la date : dateFin(F) ← 15



Exemple de décomposition

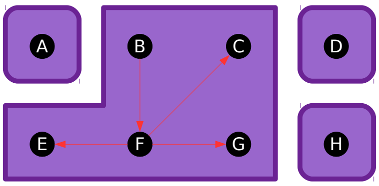
Fin de la boucle dans la fonction DFS(F)

F devient noir et on note la date : dateFin(F) ← 15



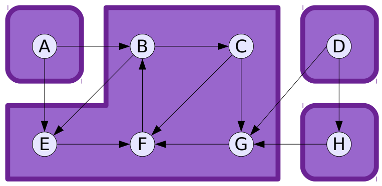
Exemple de décomposition

Le résultat du deuxième parcours en profondeur est :
une forêt de 4 arborescences



Exemple de décomposition

Chacune de ces arborescences correspondent à :
1 **composante fortement connexe** du graphe de départ



Algorithme du tri topologique

Les graphes sont utilisés pour représenter :

la précédence d'évènement

Ces graphes forment une classe :

les graphes orientés acycliques

Une séquence respectant cette précédence est :

tri topologique

Si on aligne les sommets du graphe sur une droite dans l'ordre du tri topologique :

tous les arcs sont orientés vers l'avant

Algorithme du tri topologique

Il y a deux algorithmes pour faire un tri topologique

1) On cherche un évènement qui peut se produire.
On enregistre cet évènement puis on recommence

```
Tri_topologique_1 (graphe G )
  TANT-QUE resteSommet(G) FAIRE
      chercher sommet s tq degréEntrant(s) = 0
      enregistrer s
      supprimer tous arcs sortant de s
      supprimer s
  FIN-TANT-QUE
```

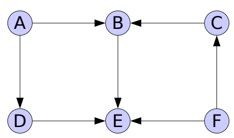
2) On utilise le parcours en profondeur

```
Tri_topologique_2 (graphe G )
  DFS_run(G)
  Ordonner les sommets suivant dateFin(s) par ordre décroissant
```


Exemple du tri topologique

On considère le graphe de précèdence suivant

ATTENTION :
Un graphe de précédence n'est pas un arbre.
Un arbre est **non orienté** connexe et acyclique.

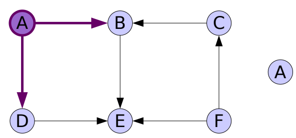


Exemple du tri topologique

degreEntrant(A) = 0

Enregistrement et supression du sommet A

Supression des arcs partant de A

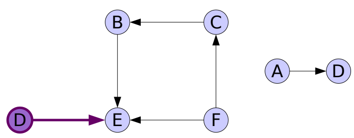


Exemple du tri topologique

degreEntrant(D) = 0

Enregistrement et supression du sommet D

Supression des arcs partant de D

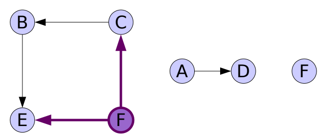


Exemple du tri topologique

degreEntrant(F) = 0

Enregistrement et supression du sommet F

Supression des arcs partant de F

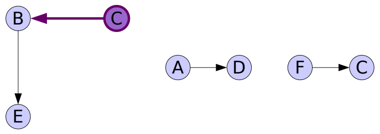


Exemple du tri topologique

degreEntrant(C) = 0

Enregistrement et supression du sommet C

Supression des arcs partant de C

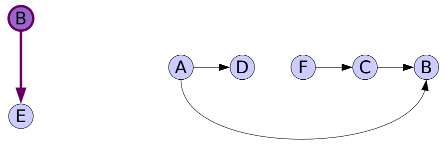


Exemple du tri topologique

degreEntrant(B) = 0

Enregistrement et supression du sommet B

Supression des arcs partant de B

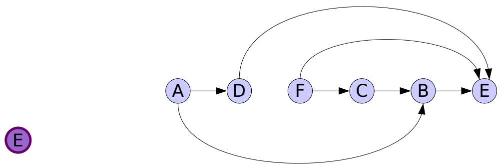


Exemple du tri topologique

degreEntrant(E) = 0

Enregistrement et supression du sommet E

Supression des arcs partant de E

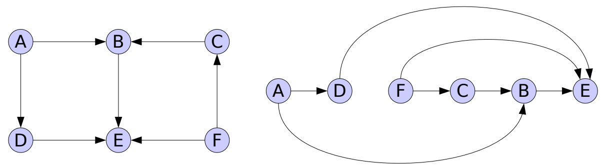


Exemple du tri topologique

Fin de l'algorithme

On a obtenu un tri topologique du graphe de départ

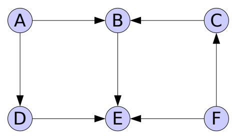
Tous les arcs sont orientés vers l'avant



Exemple du tri topologique

On considère maintenant :
la **matrice d'adjacence** du même graphe de précédence

$$\begin{array}{c|cccccc} & A & B & C & D & E & F \\ \hline A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$



Exemple du tri topologique

degreEntrant(A) = 0 ⇔ colonne 1 ne contient que des 0

Suppression du sommet A ⇔ suppression colonne 1

Suppression des arcs partant de A ⇔ suppression ligne 1

$$\begin{array}{c|cccccc} & \mathbf{A} & B & C & D & E & F \\ \hline \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ B & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ E & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F & \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

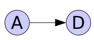
Exemple du tri topologique

degreEntrant(A) = 0 ⇔ colonne 1 ne contient que des 0

Suppression du sommet A ⇔ suppression colone 1

Suppression des arcs partant de A ⇔ suppression ligne 1

$$\begin{array}{c|ccccc} & B & C & \mathbf{D} & E & F \\ \hline B & 0 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ \mathbf{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ E & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 0 \\ F & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 \end{array}$$



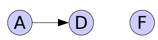
Exemple du tri topologique

degreEntrant(A) = 0 ⇔ colonne 1 ne contient que des 0

Suppression du sommet A ⇔ suppression colonne 1

Suppression des arcs partant de A ⇔ suppression ligne 1

$$\begin{array}{c|cccc} & B & C & E & \mathbf{F} \\ \hline B & 0 & 0 & 1 & \mathbf{0} \\ C & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ E & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}$$



Exemple du tri topologique

degreEntrant(C) = 0 ⇔ colonne 2 ne contient que des 0

Suppression du sommet C ⇔ suppression colone 2

Suppression des arcs partant de C ⇔ suppression ligne 2

$$\begin{array}{c|ccc|} & B & \mathbf{C} & E \\ B & 0 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{C} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ E & 0 & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

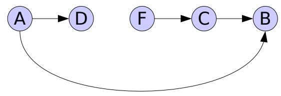
Exemple du tri topologique

degreEntrant(B) = 0 ⇔ colonne 1 ne contient que des 0

Suppression du sommet B ⇔ suppression colonne 1

Suppression des arcs partant de B ⇔ suppression ligne 1

$$\begin{array}{c|cc|} & \mathbf{B} & E \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ E & \mathbf{0} & 0 \end{array}$$



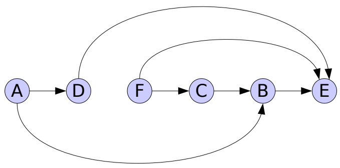
Exemple du tri topologique

degreEntrant(E) = 0 ⇔ colonne 2 ne contient que des 0

Suppression du dernier sommet E ⇔ dernière case 0

On a obtenu le même tri topologique

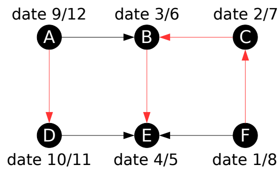
$$\begin{array}{c|c|} & \mathbf{E} \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{array}$$



Exemple du tri topologique

Deuxième algorithme de tri topologique

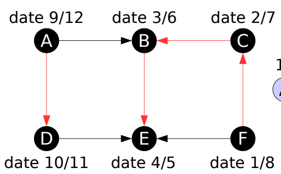
On considère maintenant un parcours en profondeur sur le même graphe de précédence.

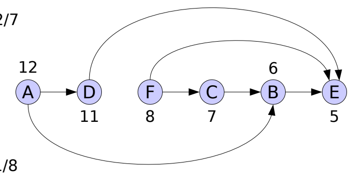


Exemple du tri topologique

On aligne les sommets du graphe sur une ligne suivant les dates de fin dans l'ordre décroissant

On obtient alors un tri topologique du graphe

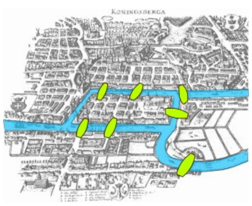




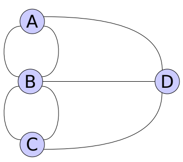
III

Graphes eulériens & Graphes hamiltoniens

Problème des 7 ponts



1726



« Lors d'une promenade, est-il possible de passer sur tous les ponts de la ville de Königsberg une et une seule fois ? »

« Existe-t-il dans le graphe, un chemin où les arêtes sont différentes deux à deux et qui revient sur le sommet de départ ? »

Lemme des poignées de mains

Théorème - (lemme des poignées de main)

La somme de tous les degrés est un nombre pair. C'est le double du nombre d'arêtes

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

Démonstration *(i)*

Chaque arête est comptée deux fois :
Une fois pour le sommet de départ.
Une fois pour le sommet d'arrivée.

Lemme des poignées de mains

Démonstration *(ii)*

Soit S_{total} le nombre de sommets du graphe

Soit S_{imp} le nombre de sommets de degré impair

$$\begin{aligned}\text{Somme des degrés} &= \sum_{i=1}^{S_{imp}} degImp_i + \sum_{i=S_{imp}+1}^{S_{total}} degPaire_i \\ &= \sum_{i=1}^{S_{imp}} (2\,k_i+1) + \sum_{i=S_{imp}+1}^{S_{total}} (2\,k_i) \\ &= 2\sum_{i=1}^{S_{total}} (k_i) + S_{imp}\end{aligned}$$

Somme des degrés est paire ⇒ S_{imp} est paire

Lacet de Jordan

Dans un graphe non orienté, on dit qu'un chemin $(v_0,v_1,v_2, \dots v_{k-1},v_k)$ est un :

Chemin de Jordan si les arêtes qu'il emprunte sont distinctes deux à deux :

$$\forall\ i, j \in [0,k-1],\ i \neq j \Rightarrow (v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1})$$

Lacet de Jordan si c'est un chemin de Jordan

$$\text{avec } v_0 = v_k$$

Cycle de Jordan si c'est un lacet de Jordan et si les sommets intermédiaires sont distincts 2 à 2

$$\forall\ i, j \in [1,k-1],\ i \neq j \Rightarrow v_i \neq v_j$$

Graphe Eulérien

On dit qu'un graphe non orienté est :

eulérien s'il existe un lacet de Jordan contenant toutes les arêtes du graphe.

Semi-eulérien s'il existe un chemin de Jordan contenant toutes les arêtes du graphe (mais pas de lacet de Jordan).

Pré-eulérien ou **chinois** s'il existe un lacet contenant au moins une fois chacune des arêtes du graphe.

Théorème de caractérisation

Théorème de caractérisation :

*Un graphe connexe est **eulérien** ssi tous ses sommets sont de degré paire*

*Un graphe connexe est **semi-eulérien** ssi il ne contient que 2 sommets de degré impaire*

Démonstration

Eulérien ⇒ Tous les sommets ont un degré pair

Eulérien ⇒ un lacet de Jordan qui passe par toutes les arrêtes.

En suivant ce lacet on passe par tous les arcs une et une seul fois

On suit ce lacet en enregistrant pour :

Le sommet départ :

l'arc sortant ⇒ *DEG + 1*

Les sommets intermédiaires :

l'arc entrant et l'arc sortant ⇒ *DEG + 2*

Le sommet d'arrivée :

l'arc entrant ⇒ *DEG + 1*

Cycle ⇒ sommet départ = sommet arrivée ⇒ *DEG + 1 + 1*

Tous les degrés obtenus sont paires

Démonstration

Semi-eulérien ⇒ Exactement 2 degrés impairs

On applique la même méthode

Semi-eulérien ⇒ sommet départ ≠ sommet arrivée

Si un sommet n'est ni le départ ni le sommet d'arrivée :

A chaque occurrence de ce sommet dans le chemin on fait *DEG + 2*

Le degré obtenu pour ce sommet est paire

Pour le sommet de départ (resp. d'arrivé) :

On fait *DEG + 1* au départ (resp. a l'arrivée)

A chaque occurrence de ce sommet dans le chemin on fait *DEG + 2*

Le degré obtenu pour ce sommet est impaire

DEG = (nbOccurrences x 2) + 1

Démonstration

Lemme :

Si tous les sommets ont un degré pair, on peut toujours étendre un chemin de Jordan vers un lacet de Jordan

Démonstration :

Soit un chemin de Jordan de u a v si $u \neq v$ alors :

On a emprunter un nombre impaire arêtes de v

Puisque par hypothèse v a un nombre paire d'arêtes, il reste au moins une arrête qui n'appartient pas au chemin de Jordan.

Donc $u \neq v$ ⇒ on peut étendre le chemin

Or il y a un nombre fini d'arêtes ⇒ extension pas infini

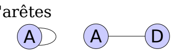
On finit donc par avoir $u = v$

On peut toujours étendre ce chemin vers un lacet de Jordan

Démonstration

Tous les sommets ont un degré pair ⇒ Eulérien

Raisonnements par récurrence sur n le nombre d'arêtes

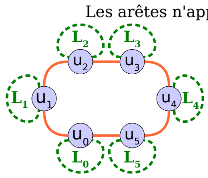
Pour $n = 1$, il n'existe que deux graphes : 

Seul le premier n'a que des degrés paires et il est Eulérien

Supposons la proposition vraie pour les graphes à n-1 arêtes

D'après le lemme on peut construire un **lacet de Jordan**

Les arêtes n'appartenant pas au lacet forment des **comp. connexes**



Dans ces **composantes** tous les degrés sont paires

Par hypothèse de récurrence **elles** sont Eulériennes

Soit L_i les lacets de Jordan les couvrant totalement

$\mathbf{u_0\, L_0\, u_0\, u_1\, L_1\, u_1\, u_2\, L_2 u_2\, u_3\, L_3\, u_3\, u_4\, L_4\, u_4\, u_5\, L_0\, u_5\, u_0}$

Forme un lacet de Jordan qui couvre tout le graphe

⇒ le graphe est Eulérien

Démonstration

Lemme :

Si exactement 2 sommets u et v ont un degré impair, on peut toujours étendre un chemin de Jordan partant de u vers un chemin de Jordan reliant u et v

Démonstration :

Soit un chemin de Jordan de u a w

si w $\neq$ *v et* w $\neq$ *u* alors : On a emprunté un nombre impair d'arêtes de w qui avait par hypothèse un nombre pair d'arêtes.

si w = u :On a emprunté un nombre pair d'arêtes de u qui avait par hypothèse un nombre impair d'arêtes.

Dans les 2 cas il reste au moins une arête qui n'appartient pas au chemin de Jordan. ⇒ on peut étendre le chemin

Or il y a un nombre fini d'arêtes ⇒ extension pas infinie

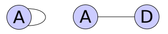
On finit donc par avoir w = v et donc chemin de Jordan reliant u et v

Démonstration

2 sommets (u et v) avec un degré impair ⇒ Semi-Eulérien

Raisonnements par récurrence sur n le nombre d'arêtes

Pour n = 1, il n'existe que deux graphes :

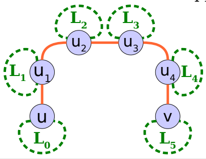


Seul le deuxième a deux degrés impairs et il est Semi-Eulérien

Supposons la proposition vraie pour les graphes à *n-1* arêtes

D'après le lemme on peut construire un **chemin de Jordan**

Les arêtes n'appartenant pas au chemin forment des **comp. connexes**



Dans ces **composantes** tous les degrés **sont pairs**

Par hypothèse de récurrence **elles** sont **Eulériennes**

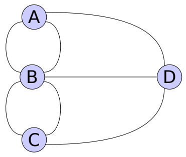
Soit L_i les **lacets** de Jordan les couvrant totalement

$u\ L_0\ u\ u_1\ L_1\ u_1\ u_2\ L_2 u_2\ u_3\ L_3\ u_3\ u_4\ L_4\ u_4\ v\ L_0\ v$

Forme un chemin de Jordan qui couvre tout le graphe

⇒ le graphe est Eulérien

Les 7 ponts : La solution



Degré(A) = 3

Degré(B) = 5

Degré(C) = 3

Degré(D) = 3

Des théorèmes précédents on peut déduire que :

Königsberg n'est pas un graphe Eulérien

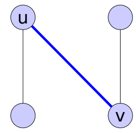
Königsberg n'est pas un graphe Semi-Eulérien

Il n'y a pas de promenade possible

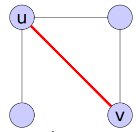
Et ce même si on ne revient pas au point départ

Définition : Pont

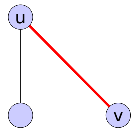
Dans un graphe non orienté connexe, on dit qu'une arête est un **pont** si, lorsqu'on la retire en effaçant les sommets devenus isolés le nouveau graphe obtenu n'est plus connexe



L'arête (u,v) est **un pont**



L'arête (u,v) n'est pas un pont



L'arête (u,v) n'est pas un pont

Algorithme de Fleury

Fleury (graphe *G*)

Choisir un sommet u

TANT-QUE degré(u) $\neq$ 0 **FAIRE**
  Choisir une arête (u,v) qui n'est **pas un pont**
  Effacer (u,v)
  SI degré(u)=0 **ALORS**
    effacer u
  FIN SI
  $u \leftarrow v$
FIN TANT-QUE

Liveness & Safety

Pour démontrer un algorithme, il suffit de démontrer deux propriétés :

La propriété de **vivacité** : **Liveness**

« Il peut toujours arriver quelque chose de bien »

La propriété de **sûreté** : **Safety**

« Il n'arrive jamais quelque chose de mauvais »

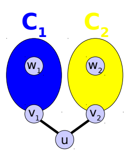
Démonstration : Liveness

« degré(u) > 0 ⇒ on peut choisir un (u,v) qui n'est pas un pont »

Par définition : s'il y a un pont ⇒ degré(u) > 1

Uniquement des ponts ⇒ au moins deux ponts

Soit C_i la composante connexe au bout du pont (u,v_i)



Le degré de v_i dans le graphe connexe C_i est impair.

D'après le lemme des poignées de main :
il existe dans C_i un autre sommet w_i de degré impair.

Que des ponts ⇒ au moins deux sommets de degré impair.

Or un graphe est eulérien ssi tous ses degrés sont pairs.

Au cours du parcours il ne peut y avoir en plus du sommet u qu'au plus un autre sommet au degré impair (l'origine du parcours).

Donc il ne peut pas y avoir plus d'un pont partant du sommet u

Par contraposé : pas plus d'un pont ⇒ pas uniquement des ponts

Démonstration : Safety

« degré(u) = 0 ⇒ on a parcouru toutes les arêtes du graphe »

L'algorithme est ainsi fait qu'à tout instant le graphe reste connexe.

Or si un graphe connexe contient un point isolé, c'est qu'il est réduit à cet unique point isolé.

Cela signifie que la dernière arête que l'on vient d'effacer était aussi la dernière du graphe.

Comme les arêtes ne sont effacées qu'après avoir été parcourues : Toutes les arêtes du graphe on été parcourues une et une seule fois.

Graphe Hamiltonien

On dit qu'un graphe non orienté connexe est :

hamiltonien s'il existe un cycle de Jordan contenant toutes les sommets du graphe.

semi-hamiltonien s'il existe un chemin de Jordan élémentaire contenant toutes les sommets du graphe (mais pas de cycle de Jordan).

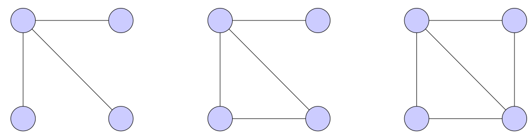
Rappel :

Un chemin $(v_0, v_1, v_2, \dots v_{k-1}, v_k)$ est **élémentaire** ssi $\forall i, j,\ v_i \neq v_j$

Un cycle est toujours élémentaire

Exemple

Les graphes suivants sont :



Non Hamiltonien **Semi Hamiltonien** **Hamiltonien**

Caractérisation

Contrairement au cas des graphes eulériens : on n'a encore trouvé aucune **condition nécessaire et suffisante** assurant qu'un graphe est hamiltonien ou semi-hamiltonien.

Il existe, cependant, de nombreux théorèmes donnant des **conditions suffisantes**.

Caractérisation

Théorème de caractérisation de O. Ore :

Soit G un graphe simple possédant n>2 sommets :

$\forall$ u,v non adjacents, degré(u) + degré(v) $\geqslant$ n

$\Rightarrow$

Le graphe G est Hamiltonien

Rappel :

Un graphe est **simple** s'il ne contient pas de boucle et que deux sommets sont reliés par au plus une arête.

La propriété intéressante d'un graphe simple : degré(s) = nbVoisin(s)

Caractérisation

Corollaire de Dirac :

Soit G un graphe simple possédant n>2 sommets :

$\forall$ u, degré(u) $\geqslant$ n/2

$\Rightarrow$

Le graphe G est Hamiltonien

IV

Graphes planaires

&

Le théorème des 4 couleurs

Théorème des 4 couleurs

Le coloriage est une activité de détente réservée aux enfants...

Pas en mathématiques !

Théorème des 4 couleurs

Le théorème des 4 couleurs :

Toute carte de géographie est coloriable avec quatre couleurs sans que deux régions frontalières n'aient pas la même couleur.

Ce théoreme pourrait appartenir aux:

« conjectures pour les nuls »

C'est à son apparente simplicité qu'il doit sa popularité

La démonstration de cette conjecture semblait accessible à *Mr ToutLeMonde*

Domaines d'applications

Dans la téléphonie mobile :

Les questions de coloriage permettent
de réduire les fréquences d'émissions utilisées.

1 couleur = 1 fréquences

Historique : La conjecture

1852 - Un cartographe anglais **Francis Guthrie**, remarque en coloriant la carte des cantons anglais, qu'il lui suffit de quatre couleurs pour que deux cantons ayant une frontière commune n'aient pas la même couleur.

Il fait part de cette observation à son frère mathématicien.

Frederick Guthrie en parle à son professeur **De Morgan**.

Première trace écrite :

lettre de De Morgan à Sir Hamilton.

1878 : **Arthur Cayley** publie la conjecture aux :
« Société mathématique de Londres »
« Société géographique »

Historique : La conjecture

Découpage
de l'Angleterre,
du Pays de Gales
et de l'Ecosse
avant les changements
de frontièreen **1974**

Historique : Une preuve ?

1879 : un avocat anglais **Alfred Bray Kempe** publie une démonstration du théorème.

Kempe reçoit une décoration pour cette preuve.

1890 : un avocat anglais **John Heawood** trouve une faille dans la preuve de Kempe.

Il démontre alors le théorème pour 5 couleurs.

Il élargit le problème à d'autres surfaces : tore, ruban, ...

Heawood est décoré pour la restauration d'un château.

Historique : Par la force

1971 : Première tentative d'utilisation de la puissance informatique par le japonais **Matsumoto**.

1976 : **Kenneth Appel et Wolfgang Haken** établissent enfin une preuve du théorème des 4 couleurs.

Leur démonstration du théorème se basait sur une approche mathématique conventionnelle et utilisait un ordinateur dans le seul but de venir à bout de plus d'un milliard de combinaisons de calculs :

Mathématiquement ils montrent qu'il y a 1478 *configurations inévitables* dans une carte géographique

Puis avec 1200 heures de calcul qu'elles sont coloriables.

Historique : Preuve assistée

1995 : **Robertson, Sanders, Seymour et Thomas.** diminuent le nombre de configurations 633 et automatisent une partie de la démonstration («inévitabilité»)

2005 : **Georges Gonthier** et **Benjamin Werner (INRIA)** s'attaquent au problème sous un angle différent : ils utilisent exclusivement des outils d'aide à la preuve.

Coq : Un outil informatique capable d'effectuer et de vérifier la démonstration étape par étape, s'affranchissant du moindre risque d'erreurs de programmation.

Les limites

Ce théorème a ses limites :

Il ne doit pas y avoir de contraintes extérieures
sur les choix des couleurs.

Dans la pratique ce n'est pas toujours le cas :

La mer et les lacs doivent être bleus.

Certains pays peuvent avoir des enclaves.

Théorème des enclaves

Théorème :

Si chacune des régions d'une carte de géographie est constituée de 1 ou 2 morceaux (au plus une enclave), il est toujours possible de la colorier avec 12 couleurs de façon à ce que deux régions frontalières n'aient pas la même couleur.

Graphe d'incidence

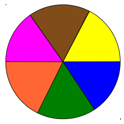
Pour modéliser ce problème on peut utiliser la théorie des graphes.

A chaque carte on associe un **graphe d'incidence**

A chaque pays correspond un sommet

A chaque frontière correspond une arête

ATTENTION :
On ne considère pas les frontières réduites à un seul point.
Ex : Pas de frontière entre le ***camembert « sport »*** *et le* ***camembert « art et littérature »***



Graphe d'incidence

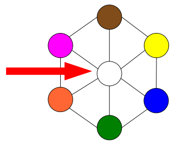
Pour modéliser ce problème on peut utiliser la théorie des graphes.

A chaque carte on associe un **graphe d'incidence**

A chaque pays correspond un sommet

A chaque frontière correspond une arête

ATTENTION :
Ne pas oublier le pays « bordure »



Graphe planaire

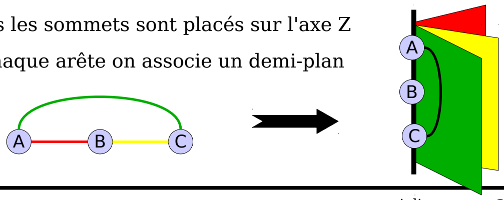
On dit d'un graphe qu'il est **planaire** si :

S'il existe une représentation dans un plan de ce graphe tel que les arêtes ne s'entrecoupent pas.

Par contre, on peut toujours représenter un graphe dans l'espace tel que les arêtes ne se croisent pas :

Tous les sommets sont placés sur l'axe Z

A chaque arête on associe un demi-plan



Identité d'Euler

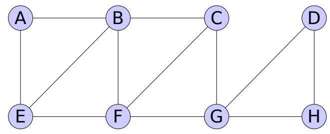
Pour tout graphe planaire connexe on a :

l'identité d'Euler : **S – A + F = 2**

S : le nombre de sommets

A : le nombre d'arêtes

F : le nombre de faces, ie le nombre de régions délimitées par des arêtes, y compris la face extérieure la seule à ne pas être bornée



S = 8

A = 12

F = 6

S – A + F = 8 – 12 + 6 = 2

Démonstration

Graphe connexe planaire ⇒ S – A + F = 2

Raisonnements par récurrence sur *n* le nombre d'arêtes

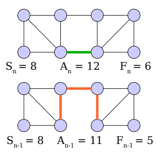
Pour *n = 0*, la connexité impose un graphe réduit à un sommet : A

S = 1, A = 0 et F = 1 ⇒ **S - A + F = 1 – 0 + 1 = 2**

Supposons la proposition vraie pour les graphes à *n-1* arêtes

Soit un graphe connexe planaire à *n* arêtes. Si on supprime 1 arête :

Si **l'arête supprimée** est bordée par deux faces :



Une seule face est non bornée ⇒ 1 de ces faces est bornée

Le reste du contour de cette face maintient la connexité.

$S_n = S_{n-1}$ mais on a diminué : $A_n - 1 = A_{n-1}$ et $F_n - 1 = F_{n-1}$

Par hypothèse de récurrences on a : $S_{n-1} - A_{n-1} + F_{n-1} = 2$

$S_{n-1} - A_{n-1} + F_{n-1} = S_n - (A_n - 1) + (F_n - 1) = \mathbf{S_n - A_n + F_n = 2}$

Démonstration (suite)

Graphe connexe planaire ⇒ S – A + F = 2

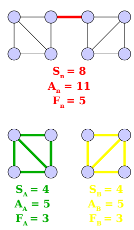
Si l'arête supprimée est bordée par une face :

Alors cette face est la face extérieure non bornée

On obtient alors 2 composantes connexes : G_A et G_B.

Elles sont planaires donc par hypothèse de récurrences on a :

$\mathbf{S_A - A_A + F_A = 2}$ et $\mathbf{S_B - A_B + F_B = 2}$



On a partitionné les sommets : $S_A + S_B = S_n$

On a supprimé une arête : $A_A + A_B = A_n - 1$

La face extérieure est commune : $F_A + F_B = F_n + 1$

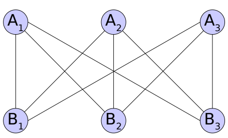
On a donc :
$$S_A + S_B - (A_A + A_B) + F_A + F_B = 2 + 2$$
$$S_n - (A_n - 1) + F_n + 1 = 4$$
$$S_n - A_n + F_n = 2$$

Graphes non planaires

1930 le mathématicien polonais **Kuratowski** montre :

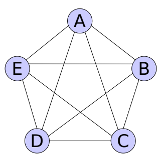
Tout graphe connexe non planaire contient un sous graphe homéomorphe à l'un des 2 graphes suivants:

K 33



Le graphe bipartie avec deux ensembles à 3 sommets «3 maisons reliées à 3 usines»

K 5



Le graphe complet à 5 sommets (reliés 2 à 2)

Démonstration : K 5

Chaque face d'un graphe planaire a au moins 3 cotés :

⇒ A ⩾ 3F

Si l'on considère l'identité d'Euler : S – A + F = 2

F = 2 – S + A ⇒ A ⩾ 6 – 3S +3A ⇒ 3S – 6 ⩾ A

K 5

S=5 et A=4+3+2+1=10

3 x 5 – 6 < 10

N'est pas planaire

K 33

S=6 et A=9

3 x 6 – 6 ⩾ 9

Pourrait être planaire

Démonstration : $\mathbf{K}_{33}$

Dans $\mathbf{K}_{33}$ un chemin de longueur 3 ne peut être fermé

Les faces du graphe $\mathbf{K}_{33}$ ne peuvent être triangulaires:

$\Rightarrow A \geqslant 4F$

Si l'on considère l'identité d'Euler : $S - A + F = 2$

$F = 2 - S + A \;\Rightarrow\; A \geqslant 8 - 4S + 4A \;\Rightarrow\; 4S - 2 \geqslant A$

$\mathbf{K}_{33}$

$S=6$ et $A=9$

$3 \times 6 - 6 < 9$

N'est pas planaire

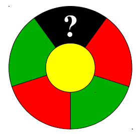
La remarque de Morgan

Comme $\mathbf{K}_5$ n'est pas planaire :

Un graphe d'incidence ne peut avoir :
5 sommets reliés 2 à 2

Une carte de géographie ne peut avoir :
5 pays mutuellement frontaliers

ATTENTION :
Cette propriété n'est pas suffisante pour démontrer le théorème des 4 couleurs.
Ex : On peut construire une carte où il n'y a pas 4 pays mutuellement frontaliers et où 3 couleurs ne sont pas suffisantes.



Démonstration de Kempe

Théorème :

Tout graphe planaire possède au moins un sommet de degré inférieur ou égal à 5

Démonstration par l'absurde :

Soit G un graphe tel que : $\forall s \in S,\ deg(s) > 5$

La somme des degrés de G est donc : $\sum_{s \in S} deg(s) \geqslant 6S$

D'après le lemme des poignées de mains, on a :

$2A \geqslant 6S \Rightarrow A \geqslant 3S$

Or on a vu que dans un graphe planaire on a :

$3S - 6 \geqslant A \Rightarrow 3S - 6 \geqslant 3S$

Démonstration de Kempe

La démonstration de Kempe :

Raisonnements par récurrence sur n le nombre de sommets.

Pour $n < 5$, le résultat est évident.

Supposons la conjecture vraie pour les graphes à n-1 sommets

Soit G un graphe planaire avec n sommets

Il existe au moins un sommet u de G de degré inférieur ou égale à 5.

Soit G' le graphe obtenu par surpression de u dans G

Par hypothèse de récurrence, il existe un coloriage de G' à 4 couleurs

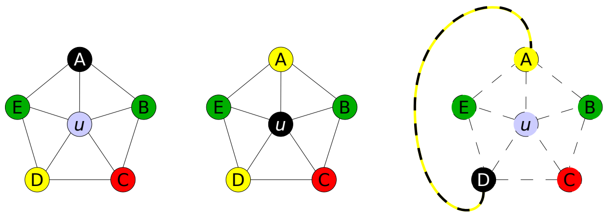
Si les voisins u n'utilisent que 3 couleurs dans le coloriage de G' :

En utilisant une couleur libre pour u on obtient un coloriage de G.

Sinon on va essayer de modifier le coloriage de G' :

Si dégage une couleur pour u, on obtiendra un coloriage de G.

Démonstration de Kempe

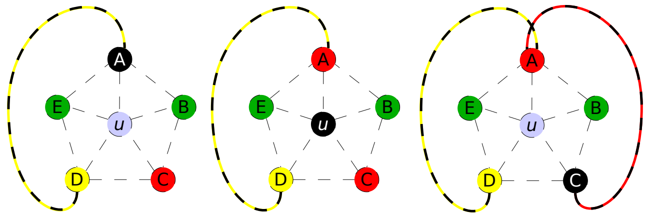


On va colorier A en jaune
⇒
De proche en proche
noir → jaune
jaune → noir

Si D reste B=jaune
***u* peut devenir noir**

Si D devient noir quand A devient jaune
⇒
Il y a une chaîne noir et rouge entre A et C

Démonstration de Kempe

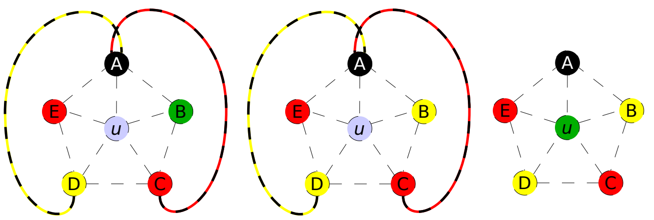


On va colorier A en rouge
⇒
De proche en proche
noir → rouge
rouge → noir

Si C reste rouge
***u* peut devenir noir**

Si C devient noir quand A devient rouge
⇒
Il y a une chaîne noir et rouge entre A et C

Démonstration de Kempe

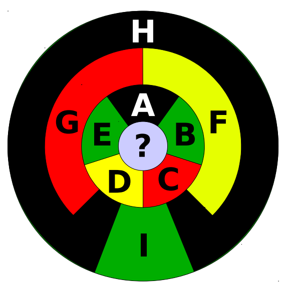


Il y a une chaîne noir et jaune entre A et D
⇒
Il n'y a pas de chaîne verte et rouge entre E et C.
E peut devenir rouge

Il y a une chaîne noir et rouge entre A et C
⇒
Il n'y a pas de chaîne verte et jaune entre B et D.
B peut devenir jaune

***u* peut devenir vert**

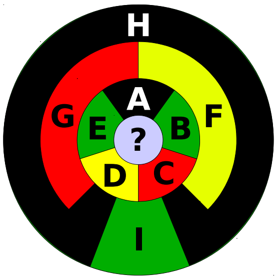
Effet de bord : Rupture de chaîne



Comme $\mathbf{K}_5$ n'est pas planaire :

Un graphe d'incidence ne peut avoir

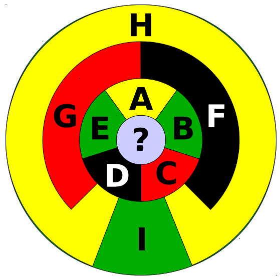
Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier **A** en jaune
⬇
Colorier **F** en noir
⬇
Colorier **H** en jaune
⬇
Colorier **D** en noir
⬇
Il y a une chaîne :
noir-jaune

A – F – H – D

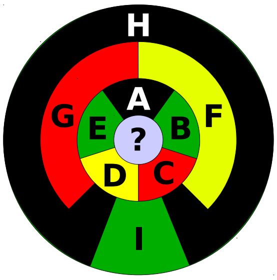
Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier **A** en jaune
⬇
Colorier **F** en noir
⬇
Colorier **H** en jaune
⬇
Colorier **D** en noir
⬇
Il y a une chaîne :
noir-jaune

A – F – H – D

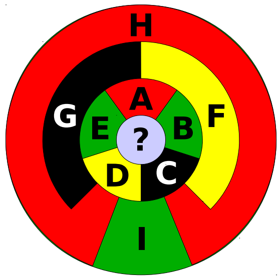
Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier **A** en rouge
⬇
Colorier **G** en noir
⬇
Colorier **H** en rouge
⬇
Colorier **C** en noir
⬇
Il y a une chaîne :
noir - rouge

A – G – H – C

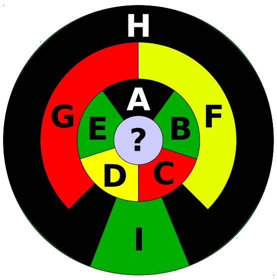
Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier **A** en rouge
⬇
Colorier **G** en noir
⬇
Colorier **H** en rouge
⬇
Colorier **C** en noir
⬇
Il y a une chaîne :
noir - rouge

A – G – H – C

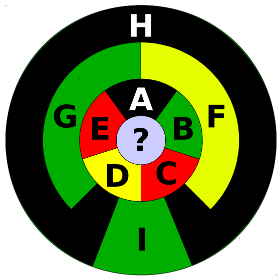
Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier **E** en rouge
⬇
Colorier **G** en vert

C reste rouge

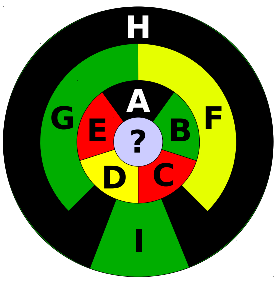
Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier **E** en rouge
⬇
Colorier **G** en vert

C reste rouge

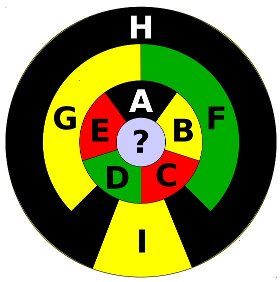
Effet de bord : Rupture de chaîne



Colorier **B** en jaune
⬇
Colorier **F** en vert
⬇
Colorier **G** en jaune
⬇
Colorier **D** en vert
⬇
Il y a une chaîne :
vert-jaune

B – F – G – D

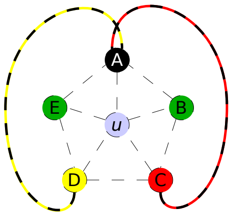
Effet de bord : Rupture de chaîne



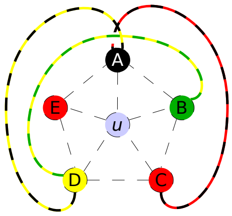
Colorier **B** en jaune
⬇
Colorier **F** en vert
⬇
Colorier **G** en jaune
⬇
Colorier **D** en vert
⬇
Il y a une chaîne :
vert-jaune

B – F – G – D

Effet de bord : Rupture de chaîne



L'argument de Kempe repose sur
l'existence de deux chaînes :
- noir et jaune entre A et D
- verte et jaune entre B et D



Effet de bord possible quand
E devient rouge :
une rupture dans a chaîne AC
⇒
rien n'empêche l'existence d'une
chaîne verte et jaune entre B et D.

Principe d'une démonstration

La démonstration de Kempe est fausse mais le principe est bon :

trouver un ensemble de sous-graphes tel que :

tout graphe graphe d'incidence contienne
au moins un de ses sous-graphes

C'est l'ensemble des **configurations inévitables**

Par récurrence si l'on supprime une configuration du graphe :

on obtient un coloriage du graphe
réduit de cette configuration inévitable.

Déduire de cette coloration :

une coloration du graphe totale

la configuration est **réductible**

Preuve = toutes les configurations inévitables sont réductibles

Théorème des 5 couleurs

C'est avec ce type de preuve que :

John Heawood démontra le théorème pour 5 couleurs

Il exhibe : 5 configurations inévitables

Il démontre leur réductibilité

Cette démonstration sera vue en TD